Второй день. 8–9 класс

15 марта

5. В футбольном турнире участвовало 20 команд, каждая сыграла с каждой ровно один матч. За победу дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме команды набрали 554 очка. Докажите, что найдутся 7 команд, каждая из которых сыграла хотя бы один раз вничью.

6. Треугольник разбили тремя отрезками, выходящими из трех его вершин, на семь частей: четыре треугольника и три четырехугольника. Могут ли все эти три четырехугольника оказаться вписанными?

7. На доске записаны 10 различных чисел. Профессор Odd вычислил всевозможные произведения нескольких записанных чисел, взятых в нечетном количестве (по 1, по 3, по 5, по 7, по 9), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на листок. Аналогично профессор Even вычислил всевозможные произведения нескольких чисел, записанных на доске, взятых в четном количестве (по 2, по 4, по 6, по 8, по 10), сложил все эти произведения и полученную сумму записал на свой листок. Оказалось, что сумма на листке профессора Odd на 1 больше, чем сумма на листке профессора Even. Докажите, что одно из чисел, выписанных на доске, равно 1.

8. На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Одна из этих точек красная, а остальные синие. Треугольник с вершинами в синих точках называется *хорошим*, если красная точка находится внутри него. Может ли оказаться, что количество хороших треугольников составляет не менее половины от общего количества треугольников с вершинами в синих точках?

Второй день. 10–11 класс

15 марта

5. В футбольном турнире участвовало 20 команд, каждая сыграла с каждой ровно один матч. За победу дается 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме команды набрали 554 очка. Докажите, что найдутся 7 команд, каждая из которых сыграла хотя бы один раз вничью.

6. Действительные числа a, b и c таковы, что $\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right| < 2$. Докажите, что для этих чисел верны также неравенства $\left|\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right| < 2$ и $\left|\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}\right| < 2$.

7. На каркасе единичного куба находятся восемь муравьев. Докажите, что найдутся два муравья на расстоянии, не превышающем 1.

8. Стол имеет форму правильного 1000-угольника со стороной 1. В одной из вершин этого 1000-угольника сидит жук. Все 1000 вершин нумеруются в некотором порядке числами $1, 2, \ldots, 1000$ так, что жук изначально находится в вершине с номером 1. Жук может ползти только по краю стола и только по часовой стрелке. Он начинает ползти из вершины номер 1 и ползет без остановки, пока не достигнет вершины 2, в которой делает остановку. Далее он продолжает путь по часовой стрелке из вершины 2, пока не достигнет вершины 3, в которой делает остановку, и т. д. Жук заканчивает свой путь в вершине номер 1000. Найдите количество нумераций вершин, для которых длина пути жука равняется 2017.